Периодические функции.

Периодические функции.

Панина Е.Г., учитель высшей квалификационной категории МОУ «СОШ №4 г.Вольска Саратовской Области»

Основные теоремы.

Определение 1. Функция f(x) называется периодической, если:

1. область определения симметрична относительно точки отсчёта;
2. существует такое число. T, что для любого x из области определения f(x+T)= f(x).

Число T называется периодом функции. Число 0 является периодом любой функции.

Определение 2. Наименьший положительный период функции называется основным периодом этой функции (y={x} , основной период равен 1).

Существуют функции, например f(x)=c, не имеющие наименьшего положительного периода.

Теорема1. Если T- период функции, то – T тоже является периодом этой функции. Если T_1 и T_2 -периоды функции f(x), то $T_1 + T_2$ –период той же функции. Если T- период функции, то nT - также является периодом этой же функции.

Теорема 2.Если функции f_1(x) и f_2(x) периодические с общим периодом T, то f_1(x)+ f_2(x) периодическая с периодом T. (в теореме не утверждается, что T - основной период)

Теорема 3. Если функции f_1(x) и f_2(x) периодические с общим периодом T, то f_1(x)* f_2(x)- периодическая с периодом T. (в теореме не утверждается, что T - основной период)

Теорема 4. Если функции f_1(x) и f_1(x) периодические с общим периодом T, то f_1(x)/ f_2(x)- периодическая с периодом T. (в теореме не утверждается, что T - основной период)

Теорема 5. Для того чтобы периодические функции f_1(x) и f_2(x) с периодами T_1 *и* T_2 имели общий период T необходимо и достаточно, чтобы число $\frac{T_1}{T_2}$ было рациональным числом.

Теорема 6. Если f(x)- произвольная функция , а g (x)- периодическая с периодом T,то функция f(g(x)) также является периодической функцией с периодом T.

Теорема 6. Если f(x) – периодическая функция с основным периодом T , то функция f(nx)также является периодической функцией с периодом $\frac{T}{n}$.

Свойства периодических функций.

1. Периодическая функция не может быть монотонно возрастающей или монотонно убывающей на всей области определения.

2. Если f(x)- периодическая функция, и для любого x из промежутка [a;a+T] выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$, то на всей области определения функция f(x) удовлетворяет этому неравенству.

3. Если f(x)- Дифференцируемая периодическая функция с периодом Т, то ее производная тоже периодическая функция с периодом Т.

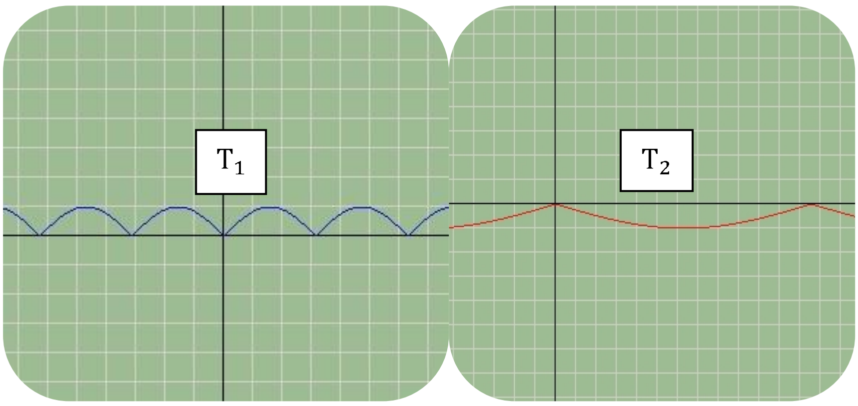
Типовые задачи.

1.<u>Исследовать на периодичность функцию y= sin3x +sinπx.</u>

Решение: Основной период функции y = sin3x +sinπx равен $\frac{2\pi}{3}$, а функции y=sin xπ равен $\frac{2\pi}{2}$=2. Однако общего периода у функций нет , так как $\frac{2\pi}{3}$:2=$\frac{\pi}{3}$ - число иррациональное.
Ответ: функция не является периодической.

2.<u>Исследовать на периодичность функцию y = cos 6x + cos9x, в случае положительного ответа найти период.</u>

Решение: Основной период функции y = cos 6x равен $\frac{\pi}{3}$. Основной период функции y= cos9x равен $\frac{2\pi}{9}$. $T_{общий}$=k $\frac{\pi}{3}$=n$\frac{2\pi}{9}$. 3k=2n. Наименьшее значение k=2. Ответ: Функция периодическая с периодом $\frac{2\pi}{3}$.



3. <u>Исследовать на периодичность функцию y ={x}+sinπx , в случае положительного ответа найти период.</u>

Решение:

Функция y ={x} имеет период 1 , а функция y= sinπx - период равный 2. Отношение периодов равно $\frac{1}{2}$, это число рациональное , значит исходная функция является периодической с основным периодом Т=2. Ответ: Функция периодическая с периодом 2.

4.<u> Исследовать на периодичность функцию y =$\sqrt{x^2-3}x+2$.</u>

Область определения функции задается неравенством $x^2-3x+2\geqq 0$, т.е. D(f) =(-∞;1]U[2;+∞). Так как область определения несимметрична относительно т.О, то функция не может быть периодической.

5. <u>Исследовать на периодичность функцию y=3x-1/x.</u>

Решение.

Найдем производную функции : $f^{/}(x)$ =3+ 1/ x^2. Очевидно ,что $f^{/}(x)$ >0 на всей области определения функции. Функция возрастает на всей области определения и не может быть периодической.

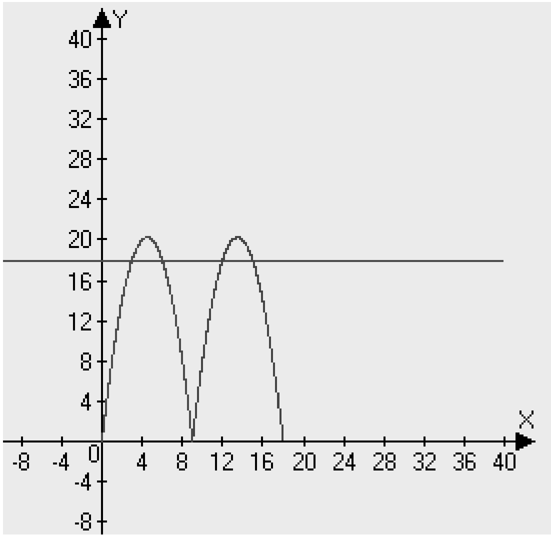
Ответ: функция не является периодической.

<u>6.Исследовать на периодичность функцию y =$\sin^2$ x.</u>

Решение:

Функция является периодической с периодом Т=2π, так как является композицией f(x)°g(x) периодической функции g(x) =$\sin x$ с основным периодом 2π и функции f(x)=x^2. Ответ: 2π.

7.<u>Функция f(x)-периодическая , с периодом , равным 9. Если x ϵ [0;9], то f(x)=$-x^2+9x$. Решите уравнение f(x)+18.</u>



Решение: $-x^2+9x=18$.

x=6 или x=3 ; x=6+9k или x=3+9t, где t, k $\in$ Z.

8. <u>Периодическая функция f(x) определена для всех действительных чисел. T=2 и f(0)=2. Найдите значение 4 f(8)-3 f(-2).</u>

Решение:

По определению периодической функции f(x$\pm$T)= f(x), следовательно , f(0-2)=2. По свойству периодической функции , если Т-период функции, то nT - также является периодом функции. f(4*2)=2. Получаем, 4 f(8)-3 f(-2)=4*2-3*2=8-6=2. Ответ:2.

8. <u>Докажите, что функция y=$\sin x^2$ не является периодической.</u>

Решение: Область определения функции- множество действительных чисел. Проверим выполняется ли условие существования числа Т, такого ,что для любого x имеет место равенство $\sin(x+T)^2$=$\sin x^2$ $(*)$. Пустьх=0, тогда $\sin T^2$=0, T^2= k , k ϵZ. Следовательно Т=$\sqrt{\pi \mathrm{k}}$, k ϵZ. Положим в равенстве $(*)$ x=$\sqrt{2\pi \mathrm{k}}$, тогда $\sin(\sqrt{2\pi \mathrm{k}}+\sqrt{\pi \mathrm{k}})^2$=$\sin 2\pi \mathrm{k} = 0$. $\sin \pi \mathrm{k}(\sqrt{2}+1)^2$=0, $\pi \mathrm{k}(\sqrt{2}+1)^2$=$\pi n$, где n ϵ Z. Тогда $\mathrm{k}(\sqrt{2}+1)^2$=n. Но это неравенство не выполняется ни при каких k и n.

9.<u>Исследовать на периодичность функцию y= $\sin \ln |x|$.</u>

Решение: Допустим, что данная функция периодическая с периодом Т>0, тогда, если T ϵ D(y) , то и T-T =0 ϵ D(y). Но число 0 не входит в область определения функции, получили противоречие. Поэтому исходная функция непериодическая.

<u>Упражнения для самостоятельного решения.</u>

1. Докажите, что функция y=$\cos \mathrm{x}^3$ не является периодической.

2.Найдите период функции y=$\sin 3\mathrm{x}$+2$\cos 5\mathrm{x}$. Ответ: 2π.

3. Найдите период функции y=$\sin\frac{4}{5}$x+3$\cos\frac{7}{8}$x+$\cos 5x$. Ответ: 80π.

4. Найдите период функции y=$\sqrt{1+4\cos x}$. Ответ: $\pi/2$.

5. Найдите период функции y = $\frac{2\sin 6x-\cos 4x}{3\sin 6x+\cos 4x}$. Ответ: π.

6.Докажите что функция y=$2^{arc\mathrm{tg}\sin x^2}$не является периодической.

7.Исследовать на периодичность функцию y=3x-$\sin x$. Ответ: не является периодической.

Список литературы:

1.Математика для поступающих. Пархимович И.В.-Мн.: Выш.шк., 1998.-463с.